

12. évfolyam gimnázium, I. forduló

1. Mennyi az első n természetes szám összegének az 5-tel való osztási maradéka, ha ezen számok négyzetösszege nem osztható 5-tel?
2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:
$$\begin{aligned}x(x + 5y) &= 39, \\y(4y - 9x) &= -38.\end{aligned}$$
3. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P(3; -7)$ pontra és amiből az $y = x + 4$ és az $y = x - 3$ egyenesek 5 egység hosszú szakaszt metszenek ki!
4. Egy szabályos tetraédert elforgatunk az egyik forgástengelye körül 60° -kal. Mekkora a két tetraéder közös részének a térfogata és felszíne?
5. Az ABC háromszögben $BC > AB$. A D pont az BC oldal olyan pontja, hogy $CD = AB$. Az E jelölje az AD szakasz, illetve a P a BC szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az ABC szög szögfelezője merőleges az EP egyenesre!
6. Egy $2n \times 2n$ négyzettábla mezőin $3n$ korongot helyeztünk el úgy, hogy bármely mezőn legfeljebb egy korong legyen. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatból eltávolíthatunk n sort és n oszlopot úgy, hogy a megmaradt mezőkön egyetlen korong se legyen!